Espaces spectraux w-locaux et totalement déconnectés

Rappels sur les espaces spectraux

$\mathcal{S}$ = espaces spectraux + applications $\overset{\text{qc}}{\mathcal{C}^0}$ spectrales

$\cup$

espaces profinis = espaces spectraux Hausdorff

* X spectral $\quad X \xrightarrow{\pi} \underbrace{\pi_0(X)}_{\text{profini}}$

$$\pi^{-1}(c) = \text{Composante connexe} = \bigcap_{\substack{U \ni c \\ \text{o/f}}} \pi^{-1}(U) = \bigcap \text{ouverts/fermés}$$

$$= \text{fermé } \underbrace{\text{généralisant}}_{\text{i.e. stable par généralisation}}$$

$$\mathcal{S} = \overbrace{2\text{-}\varprojlim}^{\text{pro-cat}} \underbrace{T_0\text{-finis}}_{\text{Ensembles ordonnés finis}} \quad (\text{ordre} = \text{relation de spécialisation})$$

$$X = \varprojlim_i X_i \qquad \pi_0(X) = \varprojlim_i \pi_0(X_i)$$

* {Constructibles} = alg. de Boole engendrée par les ouverts qc

pro-cons = $\bigcap$ Constructibles

$X_{Cons} = X$ + top. constructible = Compact tot. discontinu = profini.

$X_{Cons} = \varprojlim_{(Z_i)_i} \coprod_i Z_i$] $\longrightarrow$ force les stratifications constructibles à être disjointes topologiquement.

partition constructible de X

$X = \varprojlim_i \underbrace{X_i}_{\text{To-fini}}$ $\qquad X_{Cons} = \varprojlim_i X_i^{disc}$

Ex : * Tout fermé est pro-Cons

* $x \in X$ $\qquad \underbrace{X^{\geq x}}_{\{\text{gén. de } x\} = \text{"localisé de } X \text{ en } x\text{"}} = \{y \in X / y \geq x\} = \bigcap_{\substack{U \text{ ouvert qc} \\ x \in U}} U$ = pro-Cons.

* pro-Cons. généralisant $\Longleftrightarrow$ $\bigcap$ ouverts qc

$\nwarrow$ si $A \subset X$ constructible

$\underline{\mathrm{Int}}(A) = \{x \in A / \forall y \geq x \quad y \in A\}$

* $x \in X$ $\quad \{x\}$ = pro-Cons $= X^{\geq x} \cap \overline{\{x\}}$.

* $f : X \to Y$ dans $\mathcal{J}$ $\qquad \mathrm{Im}\, f$ = pro-Cons.

De plus $Z \subset X$ pro-Cons $\Rightarrow$ Z spectral.

En fait si $Z \subset X$, Z spectral et $Z \hookrightarrow X$ qc $\Leftrightarrow$ Z pro-Cons.

i.e. $\left[\text{"pro-Cons = sous-espaces spectraux"}\right]$

Espaces spectraux totalements ~~déconnectés~~ discontinus

Comp. Connexes = fermés généralisants

$\Downarrow$ possède toujours un point fermé

$\Downarrow$ la bonne notion de déconnecté n'est pas toute comp. connexe est réduite à un point.

Def: X spectral est totalement discontinu si toute composante connexe possède un unique point fermé.

i.e. $\forall C$ comp. connexe $\underbrace{\exists x}_{\text{forcément unique}} \in C$ tq. $\boxed{C = X^{\geq x}}$

Ex: $X = \mathrm{Spec}(A)$, $C = \varprojlim_{\substack{U \supset C \\ o/f}} U = \mathrm{Spec}(A_C) \xrightarrow[\text{pro-étale}]{} \mathrm{Spec}(A)$

X tot. discontinu $\Leftrightarrow \forall C$ A_C est un anneau local.

$*$ $X^c = \{$pt. fermés de $X\}$

Lemme: $X^c \xrightarrow[\sim]{\pi_{|X^c}} \pi_0(X)$ est un homéo.

dém: $Z \cap X^c$ fermé de X^c avec Z fermé de X

$\pi(Z \cap X^c) = \pi(Z)$ car si $z \succ z'$ alors $\pi(z) = \pi(z')$

$=$ fermé car $\underbrace{\text{pro-cons}}_{\pi \text{ spectral}}$ $\underbrace{\text{stable par spécialisation}}_{\pi_0(X) \text{ Hausdorff}}$ $\square$

$\Rightarrow$ X^c = profini $\subset X$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend right, Rightarrow] & \pi_0(X) & X^c \arrow[l, "\sim"'] \end{tikzcd}$$

r rétraction C^0 de X sur X^c

$r^{-1}(x) = X^{\geq x}$.

⚠ : En général $\underset{\substack{\cap \\ X}}{X^c}$ n'est pas fermé même si profini comme ss. espace de X.

$X = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1} \cup \{0\} \cup \{\xi\}$ avec $\xi > 0$ base de voisinages de ξ $= \left(\xi \cup \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \geq b}\right)_{b \geq 1}$

Lemme : Sont $\sim$:
* X^c est fermé
* L'inclusion $X^c \hookrightarrow X$ est qc

dém : X^c spectral car profini. Il est de plus stable par spécialisation.

$X^c \hookrightarrow X$ spectrale $\Leftrightarrow$ X^c pro-cons $\Leftrightarrow$ X^c est fermé.

Ex. précédent $X \setminus \{0\}$ qc $\quad X\setminus\{0\} \cap X^c = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ pas qc.

(3)

<u>Déf</u>: X est w-local si tot. discontinu et X^c est fermé.

$\mathcal{S}^{wl}$ = espaces spectraux w-locaux + $\underbrace{\text{morphismes locaux}}$

analogue morphismes locaux d'anneaux locaux.

$f : X \to Y$ tq. $f(X^c) \subset Y^c$

<u>Prop</u>: L'inclusion $\mathcal{S}^{wl} \hookrightarrow \mathcal{S}$ possède un adjoint à droite

$$X \longmapsto X^{wl}$$

$$\left(\varprojlim_i X_i\right)^{wl} = \varprojlim_i X_i^{wl}$$

mais $\mathcal{S} = 2\text{-}\varprojlim$ T0-finis $\Rightarrow$ il suffit de construire X^{wl} pour

X T0-fini, i.e. X = ensemble ordonné fini.

On pose alors $\quad X^{wl} = \coprod_{x \in X} X^{\geq x}$

"on remplace X par l'union disjointe de ses localisés en chaque point"

Si $\quad Y \xrightarrow[\text{spectral}]{f} X \quad$ soit $\quad g = f|_{Y^c} : Y^c \longrightarrow X$

w-local

pro-fini

spectral car $Y^c \hookrightarrow Y$ spectral

g spectral $\Rightarrow \forall x \in X$ $\quad g^{-1}(X^{\geq x})$ et $g^{-1}(X^{> x})$ ouverts qc de $Y^c \Rightarrow$ ouverts/fermés de Y^c

$\uparrow$ Y^c profini

$\Rightarrow g^{-1}(x) = g^{-1}(X^{\geq x}) \setminus g^{-1}(X^{>x})$ ouvert/fermé de Y^c

$\Rightarrow g$ loc. constant

$\Rightarrow$ factorisation

$$\begin{tikzcd} & \coprod_{x \in X} X^{\geq x} = \{(a,b) \in X^2 / a \geq b\} \arrow[d] \\ Y \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

où $\tilde{f}(y) = (f(y), f(r(y)))$ $\quad r : X \longrightarrow X^c$ rétraction.

$\square$

$*$ Construction précédente $\Rightarrow \forall X \in \mathcal{S}$

$$\begin{array}{ccc} X^{\mathrm{rel}} = \{(x,y) \in X^2 / x \geq y\} & & (x,y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & & x \end{array}$$

$\uparrow$ ensemble

fibres = {localisés de $x \in X_{Cons}$}

$$\begin{tikzcd} X^{ind} \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, two heads] & X_{Cons} = \pi_0\left(X^{ind}\right) \\ X & \end{tikzcd}$$

$(x,y) \longmapsto y$

$\downarrow$

x

$x \geq y$.

X^{ind} = fibré au dessus de X_{Cons} = X revêtu profini, fibre = localisé

* Formule générale

$$X^{ind} = \varprojlim_{(Z_i)_i} \coprod_i \underbrace{\tilde{Z}_i}_{\{\text{généralisations de } Z_i\}} \xrightarrow{\pi} \varprojlim_{(Z_i)_i} \coprod_i Z_i = X_{Cons}$$

$(Z_i)_i$ strat. constructible

Caractérisation des espaces totalement discontinus en termes de recouvrements

Prop. X spectral. Sont $\sim$:

(i) X tot. discontinu

(ii) si $(U_i)_i$ recouvrement de X alors $\coprod_i U_i \to X$ est scindé

i.e. $\exists (V_i)_i$, $V_i \subset U_i$, $X = \coprod_i V_i$

(iii) $\forall \mathcal{F}$ fsc. de gp. ab. sur X est acyclique : $\forall i > 0$ $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$.

$\to$ (ii) $\Rightarrow$ (i) $\quad C =$ Composante Connexe de X

La pté (ii) se transfert à tout fermé de X et en particulier à C.

Si $x, y \in C$ sont deux points fermés distincts

$$C = C\setminus\{x\} \cup C\setminus\{y\} \quad \text{recouvrement scindé}$$

$$\Downarrow$$

$$C = U \amalg V \quad \text{avec } x \notin U \Rightarrow V \neq \phi$$
$$y \notin V \Rightarrow U \neq \phi$$

Impossible car C Connexe.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\quad$ Cech $\Rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) = 0$.

Vrai $\forall \mathcal{F} \Rightarrow \Gamma(X, -)$ exacte

$\Rightarrow \forall \mathcal{F}$ est acyclique.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) $\quad X = \bigcup_i U_i \qquad \bigoplus_i \mathbb{Z}_{U_i} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ épimorphisme

$+ \Gamma(X, -)$ exacte $\Rightarrow 1 = \sum_i f_i \qquad f_i : X \to \mathbb{Z}$ loc. constant

$$\Downarrow$$

$\underbrace{V_i}_{\text{ouvert/fermé}} = \operatorname{supp}(f_i) \subset U_i$

$$X = \bigcup_i V_i$$

$i = 1, \dots, n$

$$\begin{cases} W_i = V_i \setminus \bigcup_{j>i} V_j = \text{ouvert/fermé} \\ X = \coprod_i W_i \quad , \quad W_i \subset U_i \end{cases}$$

(i) $\Rightarrow$ (iii) $\pi_0(X)$ profini $\Rightarrow$ tout faisceau sur $\pi_0(X)$ est acyclique

$\uparrow$ (ii)

$$\Rightarrow H^i(X, \mathcal{F}) = \Gamma(\pi_0(X), R^i\pi_* \mathcal{F}) \qquad \pi : X \to \pi_0(X)$$

$$(R^i\pi_*\mathcal{F})_c = \varinjlim_{\substack{U \ni c \\ o/f}} H^i(\pi^{-1}(U), \mathcal{F})$$

$$\varprojlim_{\substack{U \ni c \\ o/f}} \pi^{-1}(U) = \pi^{-1}(c)$$

$\underleftarrow{\lim}$ spectrale d'espaces spectraux

$$= H^i(\pi^{-1}(c), \mathcal{F})$$

$\uparrow$ Coho. d'une $\underleftarrow{\lim}$ spectrale de spectraux.

$x_c \in \pi^{-1}(c)$ l'unique point fermé de $\pi^{-1}(c)$

Si $\pi^{-1}(c) = \bigcup_i U_i$ rec. ouvert $\exists i_0$ tq. $x_c \in U_{i_0}$

et alors $\underbrace{\{\text{gén. de } x_c\}}_{\pi^{-1}(c)} \subset U_{i_0}$

$\Rightarrow U_{i_0} = \pi^{-1}(c) \Rightarrow$ tout rec. est scindé $\Rightarrow H^i(\pi^{-1}(c), \mathcal{F}) = 0 \quad \square$